Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ЗА ТЕМОЮ «РЯДИ»

Практикум

Київ

Діасофт

2016

Наведені основні методи дослідження числових і функціональних рядів.

Для студентів університету, що вивчають курси “Вища математика” і “Математичний аналіз”.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 4 від 22 грудня 2015 р.)

Рецензенти:

А. В. Тушев, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри геометрії і алгебри Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара

Т. М. Семиренко, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Дніпропетровського державного агроекономічного університету

Індивідуальні завдання
з математичного аналізу за темою
«Ряди»
Практикум

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. О. Руденко

© Вакарчук М. Б., Руденко О. О., 2016

Передмова

Теорія рядів є одним з важливих розділів курсу вищої математики. Ряди широко використовуються при наближеному обчисленні значень функцій, обчисленні інтегралів, знаходженні наближених розв’язків диференціальних рівнянь і т.д. Цим обумовлено їх застосування у багатьох прикладних задачах природознавства і техніки.

Перша частина видання являє собою опорний конспект, який складається з основних формул і понять. Головну увагу приділено формуванню практичних навиків розв’язування задач. Згідно з цим матеріал систематизовано у вигляді таблиць і схем таким чином, що можна легко знайти необхідну формулу або визначення. Варто підкреслити, що таке викладення сприяє засвоєнню лекційного матеріалу, але не замінює його.

У другій частині видання вміщені варіанти завдань для індивідуального виконання.

1. Числові ряди

1.1. Основні поняття

Основні поняття	Означення
Числовий ряд	$a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – члени ряду. $a_n = f(n)$ – загальний член ряду.
Частинна сума ряду	$S_k = a_1 + a_2 + \ldots a_k$ – k-та частинна сума ряду.
Сума ряду	$S = \lim_{k \to \infty} S_k$
Збіжність ряду	Ряд збігається, якщо S є скінченною, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Позначають також $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
Розбіжність ряду	Ряд розбіжний, якщо його сума S є нескінченною або не існує. Позначають $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
Види числовиих рядів	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знакододатним*, якщо $a_n > 0 \ \forall n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знаковід'ємним*, якщо $a_n < 0 \ \forall n$. Знакододатні та знаковід'ємні ряди називаються *знакосталими.* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знакозмінним*, якщо він містить нескінчену кількість додатних і нескінчену кількість від'ємних членів. Ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \ (a_n > 0)$ називається *знакопочередним.*

Необхідна умова збіжності числового ряду

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Достатня умова розбіжності числового ряду

Якщо $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Деякі важливі ряди

Назва	Вигляд	Поведінка
Узагальнений гармонічний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$	Збігається, якщо $\alpha > 1$, розбігається, якшо $\alpha \le 1$.
Геометрична прогресія	$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$	Збігається, якщо $\lvert q\rvert < 1$, розбігається, якщо $\lvert q\rvert \ge 1$.

1.2. Знакосталі ряди

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Назва	Означення	
Ознака порівняння	Якщо $0 \le a_n \le b_n \ \ \forall n$, тоді із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	
Гранична ознака порівняння	Якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$, то при $0 < l < \infty$ ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.	
Ознака д'Аламбера	Якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,	то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $0 \le q < 1$ збігається, при $q > 1$ – розбігається.
Ознака Коші	Якщо $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$,	
Інтегральна ознака	Якщо функція f спадає на $[1,+\infty)$ та є невід'ємною, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з інтегралом $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.	

Деякі допоміжні відомості

Деякі граничні співвідношення	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0,\ p<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ p=m,\\ \infty,\ p>m.\end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=e,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ \ (a>0)$
Важливі границі та їх наслідки	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1,$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$
Факторіал	$n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n=1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)!\cdot n,\qquad 0!=1!=1$
Подвійний факторіал	$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n$

Схема дослідження збіжності знакосталого ряду

Перевіряємо необхідну умову збіжності. Якщо вона не виконується, то ряд розбігається і дослідження збіжності закінчено. Якщо необхідна умова виконується або перевірка цього питання є складною, то треба застосувати необхідні ознаки збіжності.

Пробуємо застосувати ознаку порівняння *(або граничну ознаку порівняння*), тобто:

або шукаємо оцінку $a_n\le b_n$, де відомо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$;

або шукаємо оцінку $a_n\ge b_n$, де відомо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$;

або шукаємо b_n таке, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$, $0<l<\infty$, де $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ – відомий ряд.

Якщо ознаку порівняння застосувати не вдається, або її застосування потенційно виглядає занадто громіздким, пробуємо застосувати одну з наступних ознак:

Ознаку д'Аламбера, якщо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ є простим виразом;

Ознаку Коші, якщо $\sqrt[n]{a_n}$ є простим виразом.

(Якщо застосування однієї з ознак д'Аламбера або Коші не дає відповіді про збіжність ряду (q=1), то застосування іншої з цих ознак недоцільне).

Інтегральну ознаку, якщо $a_n = f(n)$ задовольняє умовам відповідної теореми, причому інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ можна безпосередньо обчислити.

1.3. Знакозмінні ряди

Збіжність знакозмінних рядів

Вид збіжності	Означення
Абсолютна збіжність	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним абсолютно, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$.
Умовна збіжність	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним умовно, якщо цей ряд збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ розбігається.

Зв'язок між абсолютною та умовною збіжностями

Абсолютна збіжність ряду $\Longrightarrow$ **Збіжність ряду**

Достатня ознака збіжності знакопочередного ряду

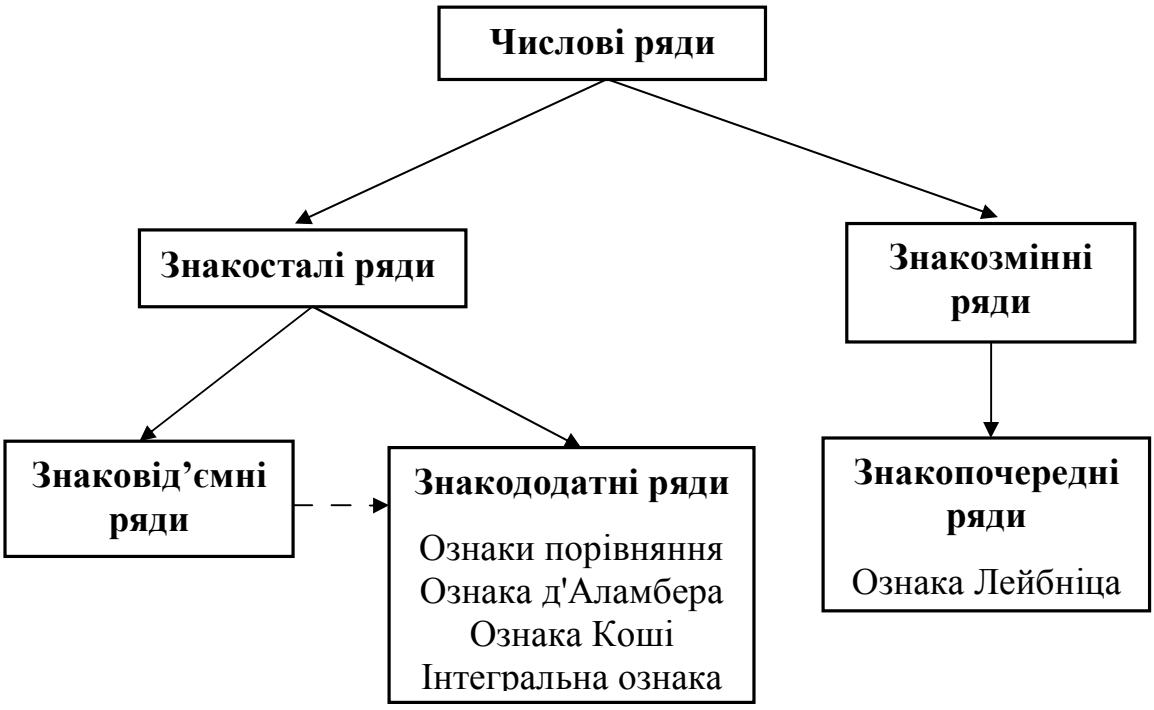
Назва	Означення
Ознака Лейбніца	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, збігається, якщо $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля , тобто 1) $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.4. Загальна схема дослідження збіжності числового ряду

Перевіряємо необхідну умову збіжності. Якщо вона не виконується, то ряд розбігається і дослідження збіжності закінчено. Якщо необхідна умова виконується або перевірка цього питання є складною, то рухаємось далі.

Якщо ряд є знакосталим, то його досліджуємо за відповідною схемою (див. вище). Дослідження збіжності знаковід'ємного ряду є рівносильним розгляду відповідного знакододатного ряду.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *є знакозмінним*, то починати треба з розгляду ряду з модулів Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається **абсолютно** і дослідження збіжності закінчено. Якщо ряд з $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається і ряд є *знакопочередний*, то застосовуємо ознаку Лейбніца. Якщо за цією ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його вважають збіжним **умовно**.



2. Степеневі ряди

2.1. Основні поняття

Основні поняття	Означення
Степеневий ряд за степенями x–A	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x\text{-}A)^n$, (1) $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$
Степеневий ряд за степенями x	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, (2) $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \boldsymbol{R}$
Коефіцієнти степеневого ряду	Сталі $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$
Радіус збіжності	$R = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$ (3) або $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$ (4)
Інтервал збіжності	Для ряду (1) $(A - R, A + R)$ Для ряду (2) $(-R, R)$
Область збіжності	Множина всіх точок збіжності. Областю збіжності є інтервал збіжності доповнений, можливо, його межовими точками.
Ряд Тейлора	Якщо f(x) має похідні будь-якого порядку в околі точки x=a, її рядом Тейлора називається степеневий ряд $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.
Ряд Маклорена	Частинний випадок ряду Тейлора, якщо *a*=0 $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

2.2. Схема дослідження області збіжності степеневого ряду

1. За формулою (3) або (4) знайти *радіус* збіжності ряду.
2. Знайти *інтервал збіжності*. Для ряду (1) $(A-R, A+R)$. Для ряду (2) $(-R, R)$.
3. В *граничних точках* інтервалу збіжності дослідити відповідні числові ряди (див. загальну схему дослідження збіжності числового ряду).
4. Граничні точки, в яких відповідні числові ряди збігаються, приєднати до інтервалу збіжності.

2.3 Розкладання основних елементарних функцій в Ряд Маклорена

Розкладання	Область збіжності
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$x \in \mathbf{R}$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$x \in \mathbf{R}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$	$x \in (-1,1]$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$	$x \in (-1,1)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n \ldots$	$x \in (-1,1)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$	$x \in (-1,1)$

3. Ряди Фур'є

3.1. Основні поняття

Основні поняття	Означення
Періодична функція	Функцію *f(x)* називають періодичною з періодом T $(T \neq 0)$, якщо $f(x+T)=f(x)$, $\forall x \in D(f)$.
Обмежена функція	Функцію *f(x)* називають обмеженою, якщо $\exists M>0 : \lvert f(x) \rvert \leq M$, $\forall x \in D(f)$.
Кусково-неперервна на відрізку функція	Функція, що має на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву першого роду.
Кусково-монотонна на відрізку функція	Функція, що є монотонною на скінченній кількості ділянок цього відрізку.
Тригонометрична система	$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$.
Коефіцієнти Фур'є функції f	$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,\ldots,$ (5) $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,\ldots$. (6)
Ряд Фур'є функції f ***на інтервалі*** $[-l,l]$***:***	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

Достатня умова подання функції через її ряд Фур'є

Назва	Означення
Ознака Діріхле	Якщо $2l$ періодична функція *f (x)* кусково-неперервна, кусково-монотонна та обмежена на відрізку $[-l,l]$ то її ряд Фур'є збігається в кожній точці відрізку: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$. Тобто, якщо x_0 точка неперервності функції *f (x)*, то її ряд Фур'є в цій точці збігається до *f* (x_0).

3.2. Схема розкладання функції у ряд Фур'є

1. Знайти коефіцієнти Фур'є функції f за формулами (5), (6).

Якщо функція задана декількома різними формулами на різних частинах інтервалу $[-l,l]$, то потрібно розбити інтервал інтегрування, а потім обчислювати вказані інтеграли як суму інтегралів.

Якщо f – парна, то $b_n = 0 \ \ \forall n$; $a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$;

Якщо f – непарна, то $a_n = 0 \ \ \forall n$; $b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Якщо функція задана на довільному інтервалі $[a,b]$ довжиною $2l$, то в формулах (5), (6) границі інтегрування будуть a і $a+2l$.

2. Підставити знайдені коефіцієнти у формулу (6).

Якщо f – парна, – її ряд Фур'є – $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$.

Якщо f – непарна, – її ряд Фур'є – $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Якщо функція f задана на інтервалі $[0,l]$, її *ряд Фур'є по косинусах* можна одержати при парному, а *ряд по синусах* – при непарному продовженні даної функції на сусідній зліва інтервал $[-l,0)$.

4. Завдання для самостійної роботи

4.1. Знайти суму ряда:

1. $\frac{1}{8}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{9n^2-1}+\ldots;$
2. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+7)}+\ldots;$
3. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\ldots;$
4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$
5. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{n(n+5)}+\ldots;$
6. $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots;$
7. $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots;$
8. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$
9. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$
10. $\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{n(n+10)}+\ldots;$
11. $\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}+\ldots;$
12. $\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(n+5)(n+6)(n+7)}+\ldots;$
13. $\frac{1}{5}+\frac{1}{45}+\ldots+\frac{1}{16n^2-8n-3}+\ldots;$
14. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\ldots;$
15. $\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}+\ldots;$
16. $\frac{1}{1\cdot 16}+\frac{1}{2\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{n(n+15)}+\ldots;$

17. $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)(n+6)}+\ldots;$

18. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

19. $\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots;$

20. $\frac{2}{1^2\cdot 3^2}+\frac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}+\ldots;$

21. $\frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\ldots+\frac{1}{4n^2+4n-3}+\ldots;$

22. $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots;$

23. $\frac{1}{24}+\frac{1}{104}+\ldots+\frac{1}{25n^2+5n-6}+\ldots;$

24. $\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{(n+4)(n+5)(n+6)}+\ldots;$

25. $\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$

4.2. Користуючись ознакою порівняння, дослідіть на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n(n+1)};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi/(4n))}{\sqrt[5]{2n^5-1}};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 5n}{n\sqrt{n}};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)4^n};$

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\ln n};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n(2^n-1)};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^{2n}};$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n};$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+3)^{5/3}};$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3^n\left(3^n-1\right)}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7+2(-1)^n}{3^{n+2}}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi/(6n))}{\sqrt[3]{4n^3-1}}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3n+1)^n}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)\cdot 5^n}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^n}{4^n\left(3^n-2\right)}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{\sqrt[3]{n^4}+2}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 3n}{\sqrt{n^3+n+1}}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+2(-1)^n}{5^{n+1}}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{1+4^{2n}}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+2n+1\right)^{4/3}}$.

4.3. Користуючись граничною ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+7)(2n+5)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos(2\pi/n)\right)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt[3]{\left(4n^3-1\right)(2n-1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1+n^{4/3}}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\cdot\sqrt[4]{2n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{arctg}\frac{5}{3^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{3n^5-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^4+5n^2}{n^4+1}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n-5}{\sqrt[3]{n^4+2n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\arcsin\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\left(2n^2-1\right)\left(n^3+n+1\right)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+4n}{n^2+1}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{tg}\frac{n+2}{n^2+5}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{(4n-1)(3n-2)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{\left(4\sqrt{n}-1\right)^5}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\operatorname{tg}(1/n)}-1\right)^2$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[4]{8n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\left(\sqrt{n}+1\right)^3}{n^3+3n+2}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+7n^2+1}{4n^4+n^3-2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{2n+3\sqrt{n}-1}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^3+5n-3}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+4n^2}{n^3+1}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt[4]{3n^6+n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt[3]{n}/\left(n^2+2n-1\right)}-1\right)$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}+2}{n^2+3}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-2}{\sqrt[4]{\left(2n^5-1\right)(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(n^3+1\right)+2n^3}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2-\sqrt{n}}{2\sqrt{n^7}+3n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1-\cos\left(1/\sqrt{n}\right)}-1\right)^2$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+3n}-\sqrt{n^3+n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^5+8n^3}{n^5+4}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(n^2+1\right)+n^2}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4n^3+2n^2+3n+1}{5n^4-n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\left(1/\sqrt{n}\right)}{\sqrt[3]{2n^6+2n+1}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{3n^2-1}}{\sqrt{n^2+2n+6}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{2/n}-1\right)\arcsin\frac{1}{\sqrt{2n^2+n+1}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{tg}\frac{n}{n^3+2n-1}$.

4.4. Користуючись ознакою д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n-1}}{3^{5n+1}}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{(n!)^2}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{(4n-2)!!}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdot\ldots\cdot(10n-9)}{(2n-1)!!}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{(4n-3)!!}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(2n-1)!!}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)\cdot 3^n}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n(n+1)!}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n\cdot n!}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n)!!}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 4^n}{n^n}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{3n}}{(2n-5)!}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$.

4.5. Користуючись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)/n)^{n^2}}{3^n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n\cdot\sin^n\frac{1}{2n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot(n/(n+1))^{n^2}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\cdot\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\ln(n+1))^{n/2}}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{5n^2+2}{7n^2+n+1}\right)^n$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{n/2}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{3\sqrt{n}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{n/2}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)^n$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n}(n/(n+1))^{n^2}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{1/n}-1)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^3+2n+1}{5n^3-1}\right)^n (n+2)^4$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} \ln^n \frac{n^4+3n^2}{n^4+1}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+1}\right)^n$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^n \arcsin^n \frac{1}{4n}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{n^3+n}{2n^3+n+1}\right)^n$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+3}{n^3+4}\right)^{n^4}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n \ln^n \frac{n^2+2n}{n^2+1}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{2/n^2}-1\right)^n \left(\frac{n}{4}\right)^{2n}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^3 \left(\frac{4n^4+3}{5n^4+2n}\right)^n$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} \left(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4+1}\right)^n$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^4+3}{n^4+2}\right)^{n^5}$.

4.6. Користуючись інтегральною ознакою, дослідити на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$;

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln n+1)}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^n-1}}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+9}$;

7. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$;

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$;

14. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln \ln n}{n \ln n}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n+1}$;

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n-3}}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-25}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(3n-1)}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3n+2)}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

4.7. Користуючись ознакою Лейбніца, дослідити на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}-2}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sh}\frac{\sqrt{n}}{3n-1}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{2n+5}}{\sqrt[3]{3n+4}}(-1)^n$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{\ln n}}{\ln n+10}$;

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-3)}{n^2-1}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+3}$;

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n^2-2)\sqrt{n+4}}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln(n+2)}{\sqrt{n+2}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n\cdot\sqrt[4]{n+2}}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{e^n}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+2)}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln(n+1)}{n+1}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+2}}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\mathrm{th}\,\frac{n-1}{n^2+1}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{n^3}+n+\sqrt{n}+1}$;

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln\ln n}{\ln n}$;

17. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-1}{n^4-1}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{n^3}{n^2+1}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n+1}}$;

20. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n(\ln n)^2}{(\ln n)^3-1}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{-n^2}{3+n}}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\mathrm{sh}\,\frac{3n+2}{n(n+1)}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{10}}{n^{22}+3}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n^2+n+1}{n^2+3}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[4]{3n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

4.8. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}(x+4)^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+5)^n}{n\cdot 2^n}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n(x+2)^n$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 4^n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{3}x^n$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 x^n}{2n-1}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{(2n-1)!!}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)(2n+1)}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}x^n$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n(2n-3)}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n+2}}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n+1)(2n+3)}{4}x^n$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(3n-2)(3n+2)}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3n+1}x^n$.

4.9. Розкласти функції в ряд за степенями x і знайти області збіжності цих розкладів:

1. $y=\frac{x}{1-x-2x^2}$;
2. $y=\sin^3 x$;
3. $y=\frac{3-x}{2-x-x^2}$;
4. $y=\sin 3x\sin 5x$;
5. $y=\ln(12-x-x^2)$;
6. $y=\frac{3-8x}{1-5x+6x^2}$;
7. $y=\cos 2x\cos 7x$;
8. $y=\ln(x^2-3x+2)$;
9. $y=\mathrm{sh}^2 2x$;
10. $y=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$;
11. $y=\cos^3 x$;
12. $y=\ln(1+3x+2x^2)$;
13. $y=\frac{7-2x}{x^2-7x+12}$;
14. $y=\sin x\cos^2 x$;
15. $y=\mathrm{ch}^2 3x$;
16. $y=(1+e^{2x})^2$;
17. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$;

18. $y=\dfrac{4x+3}{x^2-3x+2}$;

19. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

20. $y=\sin 2x\cos 5x$;

21. $y=\ln\left(1-5x+4x^2\right)$;

22. $y=\dfrac{3x+4}{x^2+x-6}$;

23. $y=\left(1+x^2\right)^{-3/2}$;

24. $y=\cos 2x\sin 9x$;

25. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.10. Розкласти функції в ряд за степенями $x-x_0$ і знайти області збіжності цих розкладів:

1. $y=\dfrac{1}{4+3x}$, $x_0=-2$;
2. $y=e^x$, $x_0=1$;
3. $y=\dfrac{1}{3+x}$, $x_0=-2$;
4. $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=3$;
5. $y=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;
6. $y=\ln x$, $x_0=1$;
7. $y=\sqrt{x}$, $x_0=2$;
8. $y=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=-2$;
9. $y=\sqrt{x^3}$, $x_0=1$;
10. $y=e^{-3x}$, $x_0=-4$;
11. $y=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$, $x_0=-1$;
12. $y=\dfrac{1}{5+2x}$, $x_0=3$;
13. $y=\sin x$, $x_0=1$;
14. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=2$;
15. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$, $x_0=-3$;
16. $y=\dfrac{1}{x}$, $x_0=3$;
17. $y=\cos x$, $x_0=1$;
18. $y=\ln x$, $x_0=3$;
19. $y=\sin x$, $x_0=-2$;
20. $y=\operatorname{ch} x$, $x_0=-1$;
21. $y=e^{2x}$, $x_0=-2$;
22. $y=\dfrac{2}{x+3}$, $x_0=-1$;
23. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4+x}}$, $x_0=-1$;
24. $y=\dfrac{1}{x^2-9x+10}$, $x_0=3$;
25. $y=\operatorname{sh} x$, $x_0=1$.

4.11. Знайти розкладання в ряд Фур'є функції, що задана на вказаному інтервалі:

1. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ \pi, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

2. $f(x)=\dfrac{x}{3}$ на інтервалі $[0,3]$ по косинусах.

3. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi-x}{2}, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

4. $f(x)=x^2$ на інтервалі $(0,\pi)$ по синусах.

5. $f(x)=|x|$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

6. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

7. $f(x)=\pi+x$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

8. $f(x)=2x$ на інтервалі $(0,\pi)$ по синусах.

9. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ на інтервалі $(0,\pi)$ по косинусах.

10. $f(x)=x\sin x$ інтервалі $[-\pi,\pi]$.

11. $f(x)=\begin{cases} 0, & -2 \le x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \end{cases}$ на інтервалі $[-2,2]$.

12. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} \le x < 1, \end{cases}$ на інтервалі $(0,1)$ по косинусах.

13. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}-x, & 0 < x \le \dfrac{3}{2}, \\ 0, & \dfrac{3}{2} < x < 3, \end{cases}$ на інтервалі $(0,3)$ по косинусах.

14. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2}\le x\le 1, \end{cases}$ на інтервалі $[0,1]$ по синусах.

15. $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi\le x\le 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0<x\le\pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

16. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -\pi<x\le 0, \\ 3x, & 0<x<\pi, \end{cases}$ на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

17. $f(x)=\begin{cases} 4x, & -\pi<x<0, \\ -x, & 0\le x<\pi, \end{cases}$ на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

18. $f(x)=x^2$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$ по косинусах.

19. $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x, & 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi, \end{cases}$ на інтервалі $(0,\pi)$ по косинусах.

20. $f(x)=\cos 2x$ на інтервалі $(0,\pi)$ по синусах.

21. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2, \end{cases}$ на інтервалі $[0,2]$ по косинусах.

22. $f(x)=x\cos x$ на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

23. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0, \\ \sin x, & 0\le x\le\pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$.

24. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<2, \\ x-2, & 2\le x<4, \end{cases}$ по косинусах на інтервалі $(0,4)$.

25. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}-x, & \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}, \end{cases}$ на інтервалі $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ по синусах.

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Изд. 16-е. – М. : Наука, 1969. – 440 с.
2. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : Наука, 1975. – 368 с.
3. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Изд. 4-е, перераб. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Изд. 8-е, стереотип. – М. : Наука, 1972. – 544 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3 т. – Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – Изд. 7-е, стереотип. – М. : Наука, 1969. – 800 с.
7. Шмелев П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях : учеб. пособие / П. А. Шмелев. – М. : Высшая школа, 1983. – 176 с.

Зміст

Передмова ……..... 3

1. Числові ряди …… 4

1.1. Основні поняття …….. 4

1.2. Знакосталі ряди ……... 5

1.3. Знакозмінні ряди ……. 7

1.4 Загальна схема дослідження збіжності числового ряду… 8

2. Степеневі ряди ……. 9

2.1. Основні поняття ……..... 9

2.2. Схема дослідження області збіжності степеневого ряду....10

2.3. Розкладання основних елементарних функцій в ряд Маклорена ……..... 10

3. Ряди Фур’є …… 11

3.1. Основні поняття ……..... 11

3.2. Схема розкладання функції у ряд Фур'є ……..... 12

4. Завдання для самостійної роботи ……... 13

Список рекомендованої літератури …… 26

Індивідуальні завдання
з математичного аналізу за темою
«Ряди»

Практикум

Укладачі:

Вакарчук Михайло Борисович
Руденко Олександр Олексійович

Головний редактор С. М. Козлов
Техредактор Ю. І. Артеменко

Підписано до друку 11.01.2016 р. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. 1,6. Ум. фарбовідб. 1,6.
Обл.-вид. арк. 0,8. Тираж 100 пр. Зам. 12.

АТ «Книга», вул. Артема, 25, м. Київ.
Свідоцтво про держреєстрацію 24729912 від 11.03.1997 р.